

Propriétés des limites

Supposons $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = b$$

Alors

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + g(x)) = a + b$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \text{ si } b \neq 0$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = |a|$

'Règles de calculs' avec les limites:

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0 ; \quad +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$(\pm\infty) \cdot (+\infty) = \pm\infty$$

$$b \cdot (+\infty) = \text{sgn}(b)(+\infty)$$

Cas 'indéterminer'

$$+\infty - \infty ; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} ; \quad \frac{0}{0} ; \quad \pm\infty \cdot 0$$

Cas plus subtile:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \text{ et } g(x) \text{ minorée}$

$$\Downarrow$$
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) + g(x) = +\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty \text{ et } g(x) \text{ majorée}$

$$\Downarrow$$
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) + g(x) = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) > \delta > 0$
 $\Downarrow$
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$
pour tout x dans un voisinage de $\pm\infty$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) < \delta < 0$
 $\Downarrow$
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot g(x) = -\infty$
pour tout x dans un voisinage de $\pm\infty$

Exemples

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^3}{4x^3 + 50x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(\frac{1}{x} - 1)}{x^3(4 + \frac{50}{x})}$
 $= -\frac{1}{4}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sin(x)) = -\infty$
bornée

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x - 4x \sin(7x^2 + 1))$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x (6 - 4 \sin(7x^2 + 1)))$
pas trop proche de 0 et positif ≥ 2
 $= -\infty$

- Comme avec les suites, il faut parfois rationaliser :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} + x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2}{(\sqrt{x^2 - 3x}) - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{-x \sqrt{1 - \frac{3}{x}} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x(-\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Comme $x \rightarrow -\infty$
on suppose $x < 0$

Remarque Lors que $x \rightarrow \pm\infty$ avec un polynôme (ou une fct rationnelle), seuls les termes du plus haut degré ont un impact.

Exemples

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 3 \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^5 + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{5x^5} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^3 + 4}{2x^3 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^3}{2x^3} = 5$$

Théorème (des gendarmes)

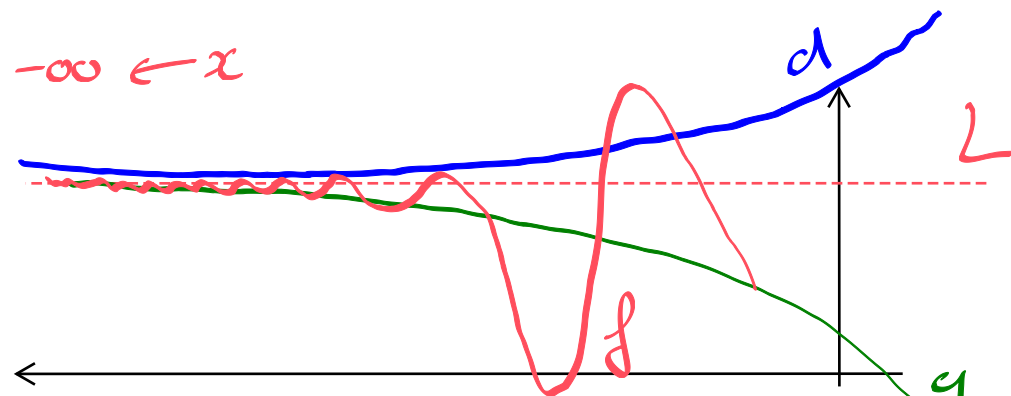
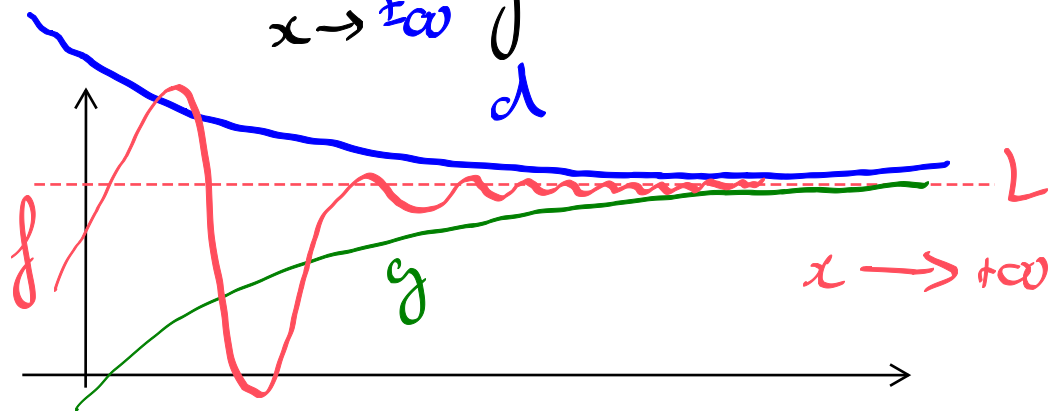
Soient f , g et d des fonctions définies sur un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Si

- $g(x) \leq f(x) \leq d(x)$ pour x assez grand (resp. petit)

et

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} d(x) = L$$

Alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$



Exemple Soit $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

On a

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{x}-1}{x} & \leq & f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \downarrow & & \downarrow x \rightarrow +\infty \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Thm des gendarmes $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

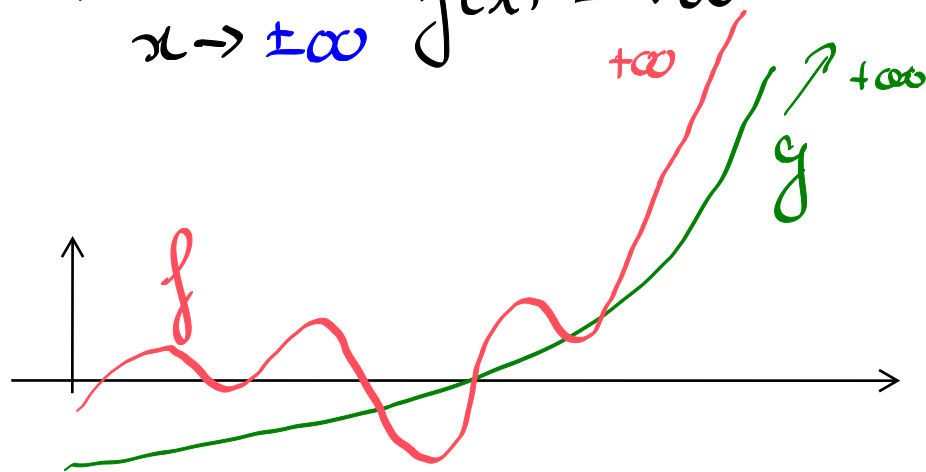
On a aussi un Théorème du chien méchant:

Théorème Soient f et g définies sur un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Alors si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$

et $f(x) \geq g(x)$ pour x assez grand (resp. petit)

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$



✓ règle : $0 \times$ bornée

Proposition Soient f et g définies sur un voisinage de $\pm\infty$
Si

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

et

- $g(x)$ est bornée

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Preuve

car $g(x)$ bornée

$$0 < |g(x)| < M$$

$$0 < |g(x)| \cdot |f(x)| < M \cdot |f(x)|$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $x \rightarrow \pm\infty$

0 0

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| \cdot |g(x)| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) \cdot g(x)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Exemple d'une limite avec paramètre

Trouver les valeurs de p tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax} + px = \frac{a}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax} + px$$

On remarque que si $p \geq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax} + px = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

Ponc il faut que $p < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax} + px$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax - p^2 x^2}{\sqrt{x^2 + ax} - px}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-p^2)x^2 + ax}{|x| \sqrt{1 + \frac{a}{x}} - px}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-p^2)x^2 + ax}{x \sqrt{1 + \frac{a}{x}} - px}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-p^2)x + a}{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} - p}$$

Si $p \neq -1$

la limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$

Si $p = -1$, la limite vaut $\frac{a}{1 - (-1)} = \frac{a}{2}$